



772F

772
F

نام
نام خانوادگی
محل امضاء

عصر جمعه
۹۰/۱۰/۲۳



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)

آزمون دانش‌پذیری دوره‌های فراگیر «کارشناسی ارشد» دانشگاه پیام نور

**رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش‌های
آنالیز عددی (کد ۶۲) و تحقیق در عملیات (کد ۶۳)**

مدت پاسخگویی: ۱۸۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۹۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	آنالیز حقیقی (۱)	۳۰	۱	۳۰
۲	آنالیز عددی پیشرفته	۳۰	۳۱	۶۰
۳	زبان تخصصی	۳۰	۶۱	۹۰

دی ماه سال ۱۳۹۰

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

- ۱- تابع $f: X \rightarrow Y$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $B \subseteq Y$ آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$ اگر و فقط اگر:
- (۱) f برو باشد. (۲) f معکوس‌پذیر باشد. (۳) f یک به یک باشد. (۴) f یکتوا باشد.
- ۲- دنباله زیر را در نظر بگیرید:
- $$x_1 = 1$$
- $$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(x_n + \frac{6}{x_n} \right) \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
- (۱) دنباله واگراست. (۲) دنباله همگراست و حد آن برابر $\sqrt{2}$ است. (۳) دنباله همگراست و حد آن برابر $\sqrt{3}$ است. (۴) دنباله همگراست و حد آن برابر ۳ است.
- ۳- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟
- (۱) $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ (۲) $A \cap B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ (۳) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ (۴) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$
- ۴- فرض کنید X یک فضای نرم‌دار بوده و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از X باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. هر گاه تعریف کنیم
- $$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$
- آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ کدام است؟
- (۱) x (۲) x (۳) \sqrt{x} (۴) ممکن است موجود نباشد.
- ۵- فرض کنید X یک فضای باناخ و $T: X \rightarrow X$ یک عملگر کراندار، و I عملگر همانی بر X باشد. هر گاه $\|T\| < 1$ آنگاه نسبت به عملگر $I - T$ چه می‌توان گفت؟
- (۱) معکوس‌پذیر است. (۲) اگر T معکوس‌پذیر باشد $I - T$ معکوس‌پذیر است. (۳) تنها در صورتی که $I + T$ معکوس‌پذیر باشد آنگاه $I - T$ معکوس‌پذیر است. (۴) حرفی نمی‌توان زد.
- ۶- هر گاه $1 \leq p < q < \infty$ ، آنگاه:
- (۱) همواره $I_p \subseteq I_q$ (۲) در حالت‌های خاصی $I_p = I_q$. (۳) همواره $I_p \subset I_q$ (۴) در حالت کلی نمی‌توان رابطه‌ای بین برقرار I_p و I_q کرد.
- ۷- $C[0,1]$ را به ترتیب نقطه به نقطه در نظر گرفته و نرم را با $\|f\| = \int_0^1 f(x) dx$ تعریف می‌کنیم. در این صورت درباره $C[0,1]$ چه می‌توان گفت؟
- (۱) شبکه تام است. (۲) $C[0,1]$ نرم‌دار است اما شبکه نیست. (۳) هم شبکه نرم‌دار است و هم شبکه باناخ است. (۴) شبکه نرم‌دار است ولی شبکه باناخ نیست.
- ۸- فرض کنید $T: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ ، C^1 مشتق‌پذیر باشد. آنگاه درباره نگاشت $x \rightarrow T'(x)$ از V به توی $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ چه می‌توان گفت؟
- (۱) یک تابع پیوسته است. (۲) یک تابع مشتق‌پذیر است. (۳) تنها اگر T یک به یک باشد، پیوسته است. (۴) حرفی نمی‌توان زد.

-۹

بازه $[0, 1]$ را همراه با اندازه لبگ λ در نظر می‌گیریم. به ازاء هر n ، $[0, 1]$ را به n زیر بازه

تقسیم می‌کنیم. این بازه‌ها را به صورت زیر شمارش می‌کنیم:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{(n-1)}{n}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right], \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

$$\left[0, \frac{1}{5}\right], \dots$$

فرض کنید f_n تابع مشخصه بازه n ام دنباله فوق باشد، در مورد دنباله توابع $\{f_n\}$ چه می‌توان گفت؟

- (۱) همگرا در اندازه است و در برخی نقاط همگرا است. (۲) نه همگرا در اندازه است و نه در نقطه‌ای همگرا است.
 (۳) همگرا در اندازه نیست اما در برخی نقاط همگرا است. (۴) همگرا در اندازه است ولی در هیچ نقطه همگرا نیست.
 -۱۰ فرض کنید $\Omega = \{0, 1\}$ و حلقه $\mathcal{R} = \{\emptyset, \Omega\}$ روی آن تعریف شده است. با تعریف اندازه μ روی \mathcal{R} به صورت

$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega) = 1$ اندازه بیرونی (μ^* outer measure) روی زیر مجموعه Ω چگونه تعریف می‌شود؟

- (۱) $\mu^*(\{0\}) = 1, \mu^*(\{1\}) = 0$ (۲) $\mu^*(\{0\}) = 1, \mu^*(\{1\}) = 1$
 (۳) $\mu^*(\{0\}) = 1, \mu^*(\{1\}) = 1, \mu^*(\Omega) = 2$ (۴) $\mu^*(\Omega) = 2, \mu^*(\{0\}) = 0, \mu^*(\{1\}) = 1$

-۱۱ اگر μ اندازه تعریف شده در سؤال ۱۰ باشد آنگاه نسبت به پیوستگی μ روی $E = \{1\}$ چه می‌توان گفت؟

- (۱) μ روی E پیوسته است. (۲) μ تنها از پائین روی E پیوسته است.
 (۳) μ تنها از بالا روی E پیوسته است. (۴) μ نه از بالا و نه از پائین روی E پیوسته است.

-۱۲ فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیر (لبگ) ناتهی از $[0, 1]$ باشد که $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_k) = 1$ آنگاه

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \text{ برابر است با:}$$

- (۱) $\{1\}$ (۲) $\{0\}$ (۳) $[0, 1]$ (۴) \emptyset

-۱۳ اگر $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ دارای خاصیت زیر باشد:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}: |f(x) - f(y)| < \sqrt{2} |x - y|$$

و A مجموعه پوچ لبگ باشد، آنگاه $f(A)$:

- (۱) پوچ است. (۲) تنها وقتی f مشتق‌پذیر باشد، پوچ است.
 (۳) تنها وقتی f یک به یک باشد، پوچ است. (۴) لزوماً پوچ نیست.

-۱۴ اگر گزاره‌های A و B به صورت زیر باشند:

X یک فضای نرم‌دار موضعاً فشرده باشد: A

X با بعد متناهی باشد: B

آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $A \Leftrightarrow B$ (۲) تنها $B \Rightarrow A$
 (۳) تنها $A \Rightarrow B$ (۴) شرایط دیگری برای نتیجه‌گیری لازم است.

۱۵- فرض کنید X یک شبکه باناخ باشد و $x \geq 0, x \in X$ آنگاه

$$\sup\{f(x) : \|f\| = 1, 0 \leq f \in X^*\}$$

برابر کدام است؟

- ۱ (۱) $\|x\|$ (۲) $\|x-1\|$ (۳) $\|x\|$ (۴) $\|x\|$ (۵) $\|x\|$
- ۱۶- اگر λ و μ دو اندازه علامتدار باشند آنگاه:

۱ (۱) $\lambda^+ \ll \mu \Rightarrow \lambda \ll \mu$ (۲) $\lambda^+ \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \leq |\mu|$

۳ (۳) $\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \leq |\mu|$ (۴) $\lambda^- \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \leq |\mu|$

۱۷- اگر λ و μ دو اندازه علامتدار باشند و اگر $\lambda \ll \mu, \lambda \perp \mu$ آنگاه:

۱ (۱) $\lambda = 0$ (۲) برای هر $A, \mu(A) = 0$

۳ (۳) برای هر مجموعه $A, \lambda(A) > 0$ (۴) اگر $\lambda(A) = 0$ آنگاه $\mu(A) = 0$

۱۸- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و A را مجموعه نقاط ناپیوستگی f تعریف کنید، آنگاه:

- ۱ (۱) A نمی‌تواند مجموعه اعداد گویا باشد. (۲) A می‌تواند زیرمجموعه‌ای از اعداد گنگ باشد.
 ۳ (۳) A نمی‌تواند مجموعه اعداد گنگ باشد. (۴) A می‌تواند اجتماعی از اعداد گویا و گنگ باشد.
 ۱۹- تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \text{ x گنگ باشد} \\ \frac{1}{n} & ; \text{ x گویا (m و n نسبت به هم اول باشند)} \end{cases}$$

آنگاه:

۱ (۱) f ، ناپیوسته است.

۲ (۲) f روی اعداد گنگ و اعداد گویای صحیح پیوسته است.

۳ (۳) روی اعداد گنگ پیوسته و روی اعداد گویا ناپیوسته است.

۴ (۴) f تنها روی اعداد اصرمی که توان دوم آنها عدد صحیح است پیوسته است.

۲۰- فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه متناهی بوده آنگاه می‌توان گفت:

۱ (۱) $L_{\frac{1}{4}}(\mu) \subseteq L_{\frac{1}{2}}(\mu)$ (۲) $L_{\frac{1}{2}}(\mu) \subseteq L_{\frac{1}{4}}(\mu)$

۳ (۳) $L_{\frac{1}{2}}(\mu) \cup L_{\frac{1}{4}}(\mu) = L_{\frac{1}{4}}(\mu)$ (۴) نمی‌توان در حالت کلی رابطه‌ای تعریف کرد.

۲۱- اگر μ یک اندازه علامتدار باشد آنگاه:

۱ (۱) $\mu^+ \wedge \mu^-$ همواره صفر است. (۲) $\mu^+ \wedge \mu^-$ همواره مثبت است.

۳ (۳) اگر $\mu^+ \wedge \mu^-$ صفر نباشد، ∞ است. (۴) $\mu^+ \wedge \mu^-$ همواره مخالف صفر و متناهی است.

۲۲- فرض کنید \mathfrak{R} گرادیه‌ای از زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیر دوه‌دو جدا از هم از \mathbb{R} است که هر یک اندازه مثبت دارد. آنگاه:

۱ (۱) \mathfrak{R} متناهی است. (۲) حداکثر شمارش‌پذیر است.

۳ (۳) نامتناهی است. (۴) شمارش‌پذیر است.

۲۳- فرض کنید f و g دو تابع پیوسته از (X, τ) به توی فضای هاسدورف (Y, τ_1) باشند، هم چنین فرض کنید $A \subset X$ و A

چگال باشد به طوری که $f(x) = g(x) \forall x \in A$ اگر $f(x) = x$ باشد، g کدام است؟

۱ (۱) $g(x) = f(x) + x$ (۲) $g(x) = x + x$

۳ (۳) $g(x) = f(x) - x$ (۴) $g(x) = x$ به ازاء $\forall x \in X$

۲۴- N را مجموعه اعداد طبیعی در نظر بگیرید. آنگاه اندازه $N \times N$:

(۱) صفر است. (۲) بی‌نهایت است. (۳) از اندازه N بیشتر است. (۴) اندازه پذیر نیست.

۲۵- فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر تعریف شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & , x \in (0, 1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

فرض کنید f انتگرال پذیر لبگ است. آنگاه $\int f d\lambda$ چه مقدار می‌شود؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

۲۶- اگر $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ روی بازه $[1, \infty)$ تعریف شود، آنگاه انتگرال لبگ $\int f d\lambda$:

(۱) موجود و برابر e (۲) موجود و برابر ۱. (۳) موجود و برابر $\ln 2$. (۴) موجود نیست.

۲۷- دو انتگرال لبگ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx, f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2$$

آنگاه $f(t) + g(t)$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) π

۲۸- تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2}-1} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$

آنگاه $\text{supp} f$ برابر است با:

(۱) $(0, 1]$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $[-1, 1] - \{0\}$

۲۹- هر گاه $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه f را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع نوشت و f مشتق پذیر است.

(۱) نزولی - همه جا (۲) صعودی - تقریباً همه جا (۳) صعودی - همه جا (۴) نزولی - تقریباً همه جا

۳۰- فرض کنید μ یک اندازه بورل بر \mathbb{R}^k و عدد ثابت $C > 0$ چنان موجود است که هر گاه برای E در رابطه $\lambda(E) = C$ صدق کند آنگاه $\mu(E) = C$. چه رابطه‌ای بین μ و λ برقرار است؟

(۱) $\mu = \lambda$ تنها روی مجموعه‌های متناهی (۲) $\mu = \lambda$ تنها روی مجموعه‌های فشرده
(۳) $\mu = \lambda$ (۴) $\mu = \lambda$ تنها روی مجموعه‌هایی با اندازه متناهی

آنالیز عددی پیشرفته

۳۱- اگر $|rd(ab) - ab| \leq 2^{-6} |ab|$ باشد، در این صورت کران بالای عبارت $rd(rd(ab).c) - abc$ کدام است؟

(۱) $2^{-6} |abc|$ (۲) $2 |abc| (1 + 2^{-6})$
(۳) $2^{-5} |abc| (1 + 2^{-7})$ (۴) $2^{-5} |abc| (1 + 2^{-1})$

۳۲- اگر $y = \varphi(a, b) = a^2 - b^2$ ، $a = 3$ ، $b = 4$ و $\text{eps} = \frac{1}{3} \times 10^{-3}$ ، مقدار خطای ذاتی که در هر الگوریتم ایجاد می‌شود،

کدام است؟

- (۱) $0/019$ (۲) $0/057$
 (۳) $0/19$ (۴) $0/57$

۳۳- به ازای کدام مقدار x ، رابطه‌ی $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ پایدار است؟ (منظور از نماد \gg خیلی بیشتر است)

- (۱) $x \gg \tan 1$ (۲) $x \gg \sin 1$
 (۳) $x \ll \cos 1$ (۴) $x \ll \cos 1 - \sin 1$

۳۴- حاصل عبارت $[3, 4] \circ [7, 6]$ کدام است؟ (منظور از نماد \circ ، تقسیم در حساب بازه‌ای است.)

- (۱) $[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ (۲) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$
 (۳) $[\frac{4}{3}, \frac{6}{3}]$ (۴) $[\frac{3}{3}, \frac{4}{3}]$

۳۵- اگر $f(x) = a^x$ ، $a > 0$ ، $h = x_{i+1} - x_i$ ، $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ باشد، در چه صورتی $\Delta^2 f_i = f_i$ خواهد بود؟

- (۱) $h = \frac{1}{\ln a}$ (۲) $h = \ln a$
 (۳) $h = \frac{\ln 2}{\ln a}$ (۴) $h = \frac{\ln a}{\ln 2}$

۳۶- اگر $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ باشد، حاصل $f[1, 1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱
 (۳) ۲ (۴) -۲

۳۷- ضریب x^2 در درونیاب چند جمله‌ای تابع جدولی زیر کدام است؟

x_i	۰	۲	۳	۴	
f_i	۲	۵	۱۰	۱۱	(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۷ (۴) ۷

۳۸- تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید. تخمینی از صفر این تابع کدام است؟

x_i	۰	$\frac{1}{3}$	۲	۳	
f_i	-۱	-۲	۱	۴	(۱) $\frac{13}{18}$ (۲) $\frac{32}{45}$ (۳) $\frac{45}{32}$ (۴) $\frac{18}{13}$

۳۹- اگر $f(1) = 1$ ، $f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$ و $f[1, \frac{3}{4}, 2] = -\frac{13}{4}$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{8}$
 (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) ۲

۴۰- با توجه به تابع جدولی زیر مقدار $f(3)$ با استفاده از روش نیویل کدام است؟

x_i	۱	۲	۴	
f_i	۲	۴	۳	(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{13}{3}$

۴۱- مقدار چند جمله‌ای درونیاب در نقطه‌ی $x=1$ برای مجموعه نقاط $\{(0,1), (0,-1), (2,0), (2,2)\}$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (1) \quad -\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3) \quad -\frac{1}{4} \quad (4)$$

۴۲- اگر چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی f در نقاط -1 و 0 و 1 و 2 برابر x^2+x+1 باشد و نقطه‌ی $(3,2)$ به جدول اضافه گردد، مقدار $f[-1,0,1,2,3]$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (1) \quad \frac{7}{24} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3) \quad -\frac{11}{24} \quad (4)$$

۴۳- تابع $f(x) = \cos x$ را در بازه‌ی $[0,1]$ در نظر بگیرید. این بازه حداقل به چند زیر بازه تقسیم شود تا اگر در هر یک از بازه‌ها f توسط یک تابع خطی درونیابی شود، خطای درونیابی بیشتر از 5×10^{-5} نباشد؟

$$30 \quad (1) \quad 45 \quad (2)$$

$$50 \quad (3) \quad 60 \quad (4)$$

۴۴- اگر $p(x)$ تابع f را در نقاط $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ و $q(x)$ تابع f را در نقاط $x_1, x_2, \dots, x_p, x_n$ درونیابی کند، کدام عبارت تابع f را در نقاط $x_1, x_2, \dots, x_p, x_n$ درونیابی می‌کند؟

$$p(x) + (q(x) - p(x)) \frac{x_n - x}{x_n - x_1} \quad (1) \quad p(x) + \frac{x_1 - x}{x_n - x_1} (p(x) - q(x)) \quad (2)$$

$$q(x) + \frac{x_1 - x}{x_n - x_1} (q(x) - p(x)) \quad (3) \quad (x - x_n) p(x) + q(x) \frac{x_1 - x}{x_n - x_1} \quad (4)$$

۴۵- اگر $s(x)$ درونیاب اسپلاین طبیعی برای تابع جدولی زیر باشد، $s(\frac{1}{2})$ کدام است؟

x_i	0	1	2
f_i	1	-1	-2

$$\frac{27}{16} \quad (1) \quad -\frac{27}{16} \quad (2)$$

$$\frac{59}{32} \quad (3) \quad -\frac{59}{32} \quad (4)$$

۴۶- چند جمله‌ای درجه دوم $p(x)$ که $p(0)=2$ ، $p'(0)=1$ و $\int_{-1}^1 p(x) dx = 3$ کدام است؟

$$1 + 2x + \frac{3}{4}x^2 \quad (1) \quad 1 + x + \frac{3}{4}x^2 \quad (2)$$

$$1 + 2x + \frac{x^2}{2} \quad (3) \quad 1 + 2x + 2x^2 \quad (4)$$

۴۷- اگر قاعده‌ی انتگرال‌گیری زیر با فرض $(x_j - x_{j-1}) = h_j$ ، $j=1, 2, 3$ به کار برده شود، مرتبه‌ی خطا کدام است؟

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)$$

$$O(h^2) \quad (1) \quad O(h^4) \quad (2)$$

$$O(h^5) \quad (3) \quad O(h^6) \quad (4)$$

۴۸- به ازای کدام مقدار n ، وقتی از روش دوزنقه‌ای تصحیح یافته مقدار $\int_0^{\pi} x \cos x dx$ را تقریب می‌زنیم، خطای آن کمتر از 10^{-5} است؟

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + \frac{h^2}{12}(f'_i - f'_{i+1}), \quad x_{i+1} - x_i = h$$

(۲) ۷

(۱) ۵

(۴) ۱۲

(۳) ۱۰

۴۹- تقریبی از $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ با استفاده از قاعده‌ی رامبرگ دوزنقه‌ای با مرتبه‌ی خطای h^4 با طول گام $h = 1$ کدام است؟

$$\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{1}{4} \quad (۲) \quad 2e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{6}e^{-1} + \frac{1}{6} \quad (۴) \quad \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{6}e^{-1} + \frac{1}{6} \quad (۳)$$

۵۰- تقریبی از انتگرال $\int_1^2 x \ln x dx$ با استفاده از قاعده‌ی دو نقطه‌ای گاوس کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}\right) + 2 \ln \frac{11}{3} \quad (۲) \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}\right) + \ln \frac{11}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}\right) + 2 \ln\left(4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (۴) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\right) \quad (۳)$$

۵۱- برای به دست آوردن مقدار تقریبی $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ کدام روش (ها) را می‌توان به کار برد؟

(۲) نقطه میانی و رامبرگ

(۱) نقطه میانی

(۴) نقطه میانی و گاوس - جیبشیف باز

(۳) رامبرگ و گاوس - جیبشیف بسته

۵۲- فرمول انتگرال گیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(x_p)$$

مقادیر w_1 ، w_2 و x_p کدام است؟

$$w_2 = x_p = \frac{2}{3} \text{ و } w_1 = \frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$x_p = w_2 = w_1 = \frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$x_p = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{1}{3}, w_1 = \frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$x_p = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{2}{3}, w_1 = \frac{1}{3} \quad (۳)$$

۵۳- اگر در ماتریس $A = [a_{ij}]$ ، $1 \leq i, j \leq n$ خاصیت زیر (*) برقرار باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (*)$$

(۲) $A + A^T$ در شرط (*) صدق می‌کند.

$$\exists j; |a_{ij}| = |a_{ji}| \quad (۱)$$

(۴) دستگاه $AX = b$ جواب ندارد.

(۳) از $AX = 0$ نتیجه می‌شود که $x = 0$.

۵۴- در روش حذفی گاوس، جهت حل دستگاه $Ax = b$ که در آن A نامنفرد (nonsingular) است، برای کنترل انتشار خطا چه باید کرد؟

- (۱) در هر مرحله مقیاس کردن (scaling) انجام می‌شود.
 - (۲) در مرحله محورگیری (pivoting) انجام شود، کافی است.
 - (۳) در گام اول عمل مقیاس کردن (scaling) و در هر مرحله محورگیری (pivoting) انجام شود.
 - (۴) چون درایه‌های ماتریس‌های میانی در هیچ مرحله بزرگ نمی‌شوند، نیاز به کنترل انتشار خطا نیست.
- ۵۵- کدام گزینه در مورد ماتریس‌های معین مثبت (positive definite)، نادرست است؟
- (۱) مقادیر ویژه‌ی این ماتریس‌ها حقیقی و مثبت هستند.
 - (۲) اگر مقادیر ویژه‌ی ماتریس A حقیقی و مثبت باشد، معین مثبت است.
 - (۳) بزرگترین درایه از لحاظ قدر مطلق در این نوع ماتریس‌ها، روی قطر اصلی قرار دارد.
 - (۴) در هر مرحله از روش حذفی گاوس برای چنین ماتریس‌هایی، ماتریس‌های میانی نیز معین مثبت است.

۵۶- کدام یک از گزینه‌های زیر روی \mathbb{R}^n ، نرم (norm) تعریف نمی‌کند؟

$$(۱) \|x\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |(x x^T)_{ij}|$$

$$(۲) \|x\| = \sqrt{x^T B x}$$

که B ماتریس متقارن و معین مثبت است.

$$(۳) \|x\|^* = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x\|_m$$

که $\|\cdot\|_m$ ، نرم m - در فضای \mathbb{R}^n باشد.

$$(۴) \|x\|_1 = \|Px\|$$

که P ماتریس نامنفرد و $\|\cdot\|$ نرم دلخواهی روی \mathbb{R}^n باشد.

۵۷- عدد شرط (condition number) به ازای $\|\cdot\|_\infty$ برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۱۶
(۳) ۲۰
(۴) ۲۵

۵۸- فرض کنید که A ماتریس $n \times n$ و سه قطری (tridiagonal) و نیز $A^{(i)} := (a_{rs}^{(i)})$ ماتریس میانی مرحله i ام در روش

حذفی گاوس و $a_i := \max_{r,s} |a_{r,s}^{(i)}|$ ($i = 0, \dots, n-1$) باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$(۱) \min_{1 \leq k \leq n-1} a_k \geq a_0$$

$$(۲) \max_{1 \leq k \leq n-1} a_k \leq 2a_0$$

$$(۳) a_k \leq ka_0 \text{ برای } k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$(۴) \text{همواره } a_k = a_0 \text{ برای } k = 1, 2, \dots, n-1$$

۵۹- اگر در دستگاه $Ax = b$ ، ماتریس A را به $A + \delta A$ تغییر دهیم در صورتی که $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$ ، کران بالای خطای

نسبی جواب کدام است؟ ($e = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ و $k(A)$ عدد شرط (condition number) ماتریس A است)

$$(۱) \frac{k(A)e}{1 - k(A)e}$$

$$(۲) \frac{e}{1 - k(A)e}$$

$$(۳) \frac{1 - k(A)e}{k(A)e}$$

$$(۴) \frac{k(A)}{1 - k(A)e}$$

۶۰- اگر روش تکراری $x_{n+1} = \frac{1}{\delta} (fx_n + \frac{\gamma}{\delta})$ با انتخاب x_0 مناسب به L با مرتبه‌ی همگرایی k همگرا باشد، k و L کدامند؟

$$(۱) k = 2, L = \sqrt[3]{3}$$

$$(۲) k = 3, L = \sqrt[3]{3}$$

$$(۳) k = 3, L = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$(۴) k = 2, L = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 61- An American Algebraist believes that the branch of mathematics known as 'Algebra' has been by Al-Khawrizmi.
1) functioned 2) founded 3) contributed 4) occurred
- 62- The Fibonacci number sequence appears in such unrelated as the family tree of a male bee and the keyboard of piano.
1) topics 2) properties 3) roots 4) curves
- 63- We treat polynomials in their own right and the ring structure of the set of all polynomials.
1) fascinate 2) obtain 3) acquaint 4) exploit
- 64- Although interesting, the detailed study of polynomials is beyond the of this book.
1) scope 2) effort 3) epoch 4) ratio
- 65- The Babylonians developed a considerable skill at algebraic and were using special cases of the quadratic formula.
1) satisfaction 2) reminiscence 3) manipulation 4) institution
- 66- The first studies may go back to the earliest times when numbers first curiosity.
1) rolled 2) verified 3) aroused 4) commuted
- 67- Make a drawing of the figure, cut out six pieces and the two shaded rectangular pieces away.
1) denote 2) throw 3) enclose 4) specify
- 68- A partition of set X is a decomposition of the set into non-empty subsets, no two of which and whose union is all of X.
1) overlap 2) partition 3) represent 4) decompose
- 69- The most spectacular spirals in nature can be seen only through a telescope-these are the galaxies and of the universe.
1) trunks 2) receptors 3) chambers 4) nebulae
- 70- The method of Gaussian elimination involves an echelon form of the matrix of the system of equations.
1) substituted 2) enabled 3) augmented 4) corresponded

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Early in the seventeenth century, the German mathematician Johannes Kepler analyzed a vast number of astronomical observations (71) by Danish astronomer Tycho Brahe and concluded that the planets must (72) around the sun elliptical orbits. He didn't know (73) Fifty years later the English mathematician and physicist Isaac Newton answered that question. Why do (74) spiral counterclockwise in the northern hemisphere? When will radioactive material (75) sufficiently decayed to enable safe (76)? How long will the concentration of a drug in the (77) remain

at effective levels? How do radio waves propagate (78) space? Why does an epidemic spread faster and faster and then (79) down? How can I be (80) the bridge I designed won't be destroyed in a windstorm?

- | | | | | |
|-----|--------------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| 71- | 1) made | 2) that made | 3) to make | 4) making |
| 72- | 1) move | 2) moving | 3) movement | 4) moved |
| 73- | 1) why | 2) why that | 3) why it | 4) it why |
| 74- | 1) wind hurricanes | 2) hurricane winds | 3) wind of hurricane | 4) winds hurricane |
| 75- | 1) is | 2) be | 3) being | 4) is being |
| 76- | 1) handles | 2) handled | 3) handle | 4) handling |
| 77- | 1) stream blood | 2) stream's blood | 3) bloodstream | 4) blood's stream |
| 78- | 1) on | 2) above | 3) within | 4) through |
| 79- | 1) slows | 2) slow | 3) slowed | 4) slowing |
| 80- | 1) sure | 2) sure that | 3) sure of | 4) sure for |

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following passage and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

Passage 1:

Most people are familiar with the term statistics as it is used to denote and record numerical facts and figures: for example; the daily prices of selected materials sold in the stores, the number of elementary schools in the country, or even the number of meters gained by winning team in a game. However, this usage of the term is not the central focus of the subject. Statistics primarily deals with situations in which the occurrence of some event cannot be predicted with certainty. Our conclusions are often uncertain because we base them on incomplete data. Statistics is a science of concepts and method chiefly used to collect and interpret complete data concerning a particular area of investigation and to draw conclusions where uncertainty and variation are present. The development of the theory of probability has increased the scope of statistical applications. Much data can be estimated accurately by certain probability distributions, and the results by certain statistical data. In collection and analyzing statistical data, adequate precautions must be taken to secure complete and accurate information.

- 81- The passage points to the fact that
- 1) teams win better if they know a little statistics
 - 2) numerical facts and figures are usually denoted
 - 3) selected store materials can form part of statistics
 - 4) the science of statistics is not quite usage-based
- 82- The passage suggests that
- 1) it is not possible to predict events with certainty
 - 2) occurrence of events depends on why they happen
 - 3) statistics deals with situations of uncertainty
 - 4) uncertain conclusions may result in statistical analysis
- 83- It is stated in the passage that statistical applications before the development of the theory of probability.
- 1) had little relevance
 - 2) had a more limited scope
 - 3) were mainly used in predictions
 - 4) were used for complex calculations

- 84- We may understand from the passage that the theory of probability is of special importance to the analysis of statistical data when dealing with data.
 1) a lot of 2) unpredictable 3) accurate 4) distributed
- 85- The word 'secure' in the passage (underlined) is closest to
 1) 'approach' 2) 'originate' 3) 'interpret' 4) 'guarantee'

Passage 2:

Linear algebra is a central subject in undergraduate mathematics. Many important topics must be included in this course. For example, linear dependence, basis inner product, and linear transformation must be covered thoroughly and carefully. Not only are such topics important in linear algebra, they are usually a per-requisite for other courses such as differential equations. A great deal of attention has been given in this book to presenting the "standard" linear algebra topics.

This course is often the first course in abstract mathematics for students. The reader should not be overwhelmed with proofs, but should nevertheless be taught how to prove theorems. The proofs of some theorems are given, when those proofs are instructive. Some proofs are given in outline from whereas other proofs have been omitted. Students should be introduced slowly and carefully to the art of developing and writing proofs. This skill is at the heart of mathematics. The student should be trained to think mathematically.

- 86- The passage suggests that
 1) undergraduate courses deal mainly with linear algebra
 2) linear algebra is part of linear transformation courses
 3) basis and inner product are taught in graduate courses
 4) differential equations depends partly on inner product
- 87- The passage seems to say that
 1) it is rather simple to teach how to prove theorems
 2) abstract physics and mathematics are related
 3) not all proofs for theorems are instructive to teach
 4) standard linear algebra topics are not very complex
- 88- The passage is mainly about
 1) how to teach mathematics 2) undergraduate studies
 3) proving theorems 4) a course in mathematics
- 89- We may understand from the passage that thinking mathematically
 1) is a skill which has to be learned even if it is not taught
 2) is taught by giving proofs for theorems in outline form
 3) starts at the early stages of becoming interested in mathematics
 4) depends very much on the art of developing and writing proofs
- 90- The word 'overwhelm' in the passage (underline) can best be replaced by
 1) dealt in 2) flooded by 3) provided with 4) pushed into