



757
F

نام
نام خانوادگی
محل امضاء

عصر جمعه
۹۰/۱۰/۲۳



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ه)

آزمون دانش‌پذیری دوره‌های فراگیر «کارشناسی ارشد» دانشگاه پیام نور

رشته‌ی آمار ریاضی (کد ۶۱)

مدت پاسخگویی ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۶۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	استنباط آماری (۱)	۳۰	۱	۳۰
۲	آنالیز ریاضی (۲)	۳۰	۳۱	۶۰

دی ماه سال ۱۳۹۰

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱ فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند و $X_i \sim F_{\theta}(x) = x^{-\theta-1}$ ، $i=1, \dots, n$ باشد که در آن $\theta > 0$ نامعلوم و t_1, \dots, t_n مقادیر مثبت ثابت هستند. آماره بسنده می‌نیمال کدام است؟

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n t_i X_i \quad (2) & \prod_{i=1}^n X_i \quad (1) \\ & \sum_{i=1}^n t_i \ln X_i \quad (4) & \prod_{i=1}^n t_i X_i \quad (3) \end{aligned}$$

۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $\text{Beta}(\alpha, \alpha^r)$ باشد. آماره بسنده می‌نیمال کدام است؟

$$\begin{aligned} & r \sum_{i=1}^n \ln X_i + \sum_{i=1}^n \ln(1 - X_i) \quad (2) & \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{X_i}{1 - X_i} \right) \quad (1) \\ & \sum_{i=1}^n \ln X_i + \sum_{i=1}^n \ln(1 - X_i) \quad (4) & \sum_{i=1}^n \ln X_i + r \sum_{i=1}^n \ln(1 - X_i) \quad (3) \end{aligned}$$

۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. اگر $\ln \lambda = \alpha + \beta t_i$ ، $i=1, \dots, n$ که در آن β, α نامعلوم و t_i ها مقادیر ثابت معلوم هستند، آماره بسنده می‌نیمال برای (α, β) کدام است؟

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n t_i X_i \quad (2) & \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n t_i X_i \right) \quad (1) \\ & \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i^{t_i} \quad (4) & \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^{t_i} \right) \quad (3) \end{aligned}$$

۴- فرض کنید X_1, \dots, X_m و Y_1, \dots, Y_n دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $P(\lambda^r)$ ، $P(\lambda)$ باشند. آماره بسنده می‌نیمال برای λ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m X_i + \sum_{j=1}^n Y_j \quad (2) & r\bar{X} + \bar{Y} \quad (1) \\ & \sum_{i=1}^m X_i + \sum_{j=1}^n Y_j^r \quad (4) & \sum_{i=1}^m X_i + r \sum_{j=1}^n Y_j \quad (3) \end{aligned}$$

۵- فرض کنید تابع $f(x)$ در رابطه $\int f(x)e^{\theta x} dx = e^{\frac{\theta^2}{r}}$ ، $\theta \in \mathbb{R}$ صدق کند، $f(x)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{r\pi}} e^{-\frac{1}{r}x^2} \quad (2) & e^{-\frac{1}{r}x^2} \quad (1) \\ & \frac{1}{\sqrt{r\pi}} e^{-\frac{1}{r}x^2} \quad (4) & \sqrt{r\pi} e^{-\frac{1}{r}x^2} \quad (3) \end{aligned}$$

۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\lambda)$ باشد. اگر $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ و $\overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ ، کدام جفت از

آماره‌های زیر مستقل از هم هستند؟

$$\frac{\overline{X^2}}{X^2}, \bar{X} \quad (۱) \quad \bar{X}, \bar{X} \quad (۲)$$

$$\frac{\overline{X^2}}{X^2}, \bar{X} \quad (۳) \quad \bar{X}, \bar{X} \quad (۴)$$

۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $U(-\theta, \theta)$ باشد. کدام جفت از آماره‌های زیر مستقل از هم هستند؟

$$X_{(n)} - X_{(1)}, \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \quad (۱) \quad \frac{\bar{X}}{X_{(n)} - X_{(1)}}, \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \quad (۲)$$

$$\min(-X_{(1)}, X_{(n)}), \max(-X_{(1)}, X_{(n)}) \quad (۳) \quad X_{(n)} - X_{(1)}, \max(-X_{(1)}, X_{(n)}) \quad (۴)$$

۸- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند که در آن $X_i \sim N(t_i \theta, 1)$ ، $i=1, \dots, n$ نامعلوم و t_i ها مقادیر ثابت معلوم هستند. برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i X_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2} \quad (۱) \quad \hat{\theta} = \bar{X} \quad (۲)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 X_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2} \quad (۳) \quad \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i X_i}{\sum_{i=1}^n t_i} \quad (۴)$$

۹- فرض کنید X_1, \dots, X_m و Y_1, \dots, Y_n دو نمونه تصادفی مستقل از هم با توزیع‌های به ترتیب $E(\lambda_1)$ و $E(\lambda_2)$ باشند.

برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ کدام است؟ (راهنمایی: $X \sim E(\lambda) \rightarrow f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ، $x > 0$)

$$\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \quad (۱) \quad \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \quad (۲)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sum_{j=1}^n Y_j} \quad (۳) \quad \frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{\sum_{i=1}^m X_i} \quad (۴)$$

۱۰- در مسأله ۹، برآوردگر ناریب با کمترین واریانس (UMVUE) پارامتر $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ کدام است؟

$$\frac{m}{m-1} \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \quad (۱) \quad \frac{n-1}{n} \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \quad (۲)$$

$$\frac{m-1}{m} \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \quad (۳) \quad \frac{n}{n-1} \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \quad (۴)$$

۱۱- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_r یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\lambda)$ باشد. $UMVUE$ پارامتر $\frac{1}{1+\lambda}$ کدام است؟

$$(T = \sum_{i=1}^r X_i)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1 + \frac{Y}{T^2} (1 + e^{-T}) \\ (2) \quad & 1 - \frac{Y}{T} + \frac{Y}{T^2} (1 + e^{-T}) \\ (3) \quad & 1 - \frac{Y}{T} (1 + e^{-T}) \\ (4) \quad & \frac{Y}{T} (1 + e^{-T}) \end{aligned}$$

۱۲- فرض کنید X_1, \dots, X_m و Y_1, \dots, Y_n دو نمونه تصادفی مستقل از هم با توزیع‌های به ترتیب $P(\lambda_1)$ و $P(\lambda_2)$ باشند. $UMVUE$ پارامتر $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & (\bar{X} - \bar{Y})^2 + \left(\frac{1}{m}\bar{X} + \frac{1}{n}\bar{Y}\right) \\ (2) \quad & (\bar{X} - \bar{Y})(m\bar{X} + n\bar{Y}) \\ (3) \quad & (\bar{X} - \bar{Y})^2 - \left(\frac{1}{m}\bar{X} + \frac{1}{n}\bar{Y}\right) \\ (4) \quad & (\bar{X} - \bar{Y})(n\bar{X} + m\bar{Y}) \end{aligned}$$

۱۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_{\theta}(x) = \frac{\phi(x)}{\Phi(\theta)}, \quad x < \theta$$

که در آن ϕ و Φ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع نرمال استاندارد هستند. $UMVUE$ پارامتر $\Phi(\theta)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{n}{n+1} \Phi(X_{(n)}) \\ (2) \quad & \frac{n+1}{n} \Phi(X_{(1)}) \\ (3) \quad & \frac{n}{n+1} \Phi(X_{(1)}) \\ (4) \quad & \frac{n+1}{n} \Phi(X_{(n)}) \end{aligned}$$

۱۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند. که در آن $X_i \sim N(m_i, \mu, m_i \sigma^2)$ ، $i=1, \dots, n$. μ و σ^2 هر دو نامعلوم و m_i ها مقادیر ثابت معلوم هستند. $UMVUE$ پارامتر σ^2 کدام است؟

$$(\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} X_i^2 - n \frac{\bar{X}^2}{\bar{m}} \right) \\ (2) \quad & \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} X_i^2 - n \frac{\bar{X}^2}{\bar{m}} \right) \\ (3) \quad & \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n m_i X_i^2 - n \bar{m} \bar{X}^2 \right) \\ (4) \quad & \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n m_i X_i^2 - n \bar{m} \bar{X}^2 \right) \end{aligned}$$

۱۵- فرض کنید $X \sim B(n, \theta)$ باشد. تحت تابع زیان مربع خطا، یعنی $L(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^2$ ، برآوردهای خطی زیر را برای θ در نظر بگیرید. مقدار اریبی $\delta_{a,b}$ در برآورد θ کدام است؟

$$\delta_{a,b}(X) = a \frac{X}{n} + (1-a)b$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & (1-a)(\theta+b) \\ (2) \quad & (a-1)(\theta+b) \\ (3) \quad & (a-1)(\theta-b) \\ (4) \quad & (a-1)(b-\theta) \end{aligned}$$

۱۶- در مسأله ۱۵، $\text{Var}(\delta_{a,b}(X))$ کدام است؟

$$\frac{a^r}{n} \theta(1-\theta) \quad (۱)$$

$$\frac{a^r}{n} \theta(1-\theta) + (a-1)^r (\theta-b)^r \quad (۲)$$

۱۷- در مسأله ۱۵، اگر $a > 1$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (مجاز = *admissible*، غیرمجاز = *inadmissible*)

$$\delta_{a,b} \text{ برآوردگری غیرمجاز است و } \frac{X}{n} \text{ بر آن غلبه دارد.} \quad (۱)$$

$$\delta_{a,b} \text{ برآوردگری مجاز است.} \quad (۲)$$

$$\delta_{a,b} \text{ برآوردگری غیرمجاز است، اما امکان دستیابی به برآوردگر غالب وجود ندارد.} \quad (۳)$$

$$\delta_{a,b} \text{ برآوردگری مجاز است چون نسبت به یک توزیع پیشین یک برآوردگر بی‌زی است.} \quad (۴)$$

۱۸- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار اطلاع فیشر، $I_X(\theta)$ ، کدام

است؟

$$f_\theta(x) = \frac{1+\theta x}{r}, |x| < 1$$

$$n \left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{r\theta^2} \ln \frac{1+\theta}{1-\theta} \right] \quad (۲)$$

$$n \left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{r\theta^2} \ln \frac{1-\theta}{1+\theta} \right] \quad (۱)$$

$$n \left[\frac{r}{\theta^2} + \frac{1}{r\theta^2} \ln \frac{1+\theta}{1-\theta} \right] \quad (۴)$$

$$n \left[\frac{1}{r\theta^2} \ln \frac{1-\theta}{1+\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right] \quad (۳)$$

۱۹- فرض کنید $X | \theta \sim U(0, \theta)$ و $\theta \sim \Gamma(r, 1)$ باشد. تحت تابع زیان مربع خطا، برآوردگر بی‌زی θ کدام است؟

$$X \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

$$X + 1 \quad (۴)$$

$$X + \frac{1}{r} \quad (۳)$$

۲۰- فرض کنید $X \sim B(n, p_1)$ و $Y \sim B(n, p_2)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر توزیع‌های پیشین برای

p_1, p_2 مستقل از هم و یکنواخت روی فاصله $(0, 1)$ باشد، برآوردگر بی‌زی $p_1 - p_2$ تحت تابع زیان

$$L((p_1, p_2), \delta) = (p_1 - p_2 - \delta)^2$$

کدام است؟

$$\frac{X-Y}{n+1} \quad (۲)$$

$$\frac{X-Y}{n} \quad (۱)$$

$$\frac{X-Y}{n-2} \quad (۴)$$

$$\frac{X-Y}{n+2} \quad (۳)$$

۲۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد:

$$f_\theta(x) = \binom{r+x-1}{x} \theta^x (\theta+1)^{-(r+x)}, x = 0, 1, 2, \dots, \theta > 0$$

برآورد ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟

$$\frac{X}{r} \quad (۲)$$

$$X \quad (۱)$$

$$\frac{X}{r+2} \quad (۴)$$

$$\frac{X}{r+1} \quad (۳)$$

۲۲- در مسأله ۲۱، اگر تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $\frac{1}{\theta(\theta+1)}$ باشد و توزیع پیشین دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، برآورد بیزی θ کدام است؟

$$\pi_{\alpha,\beta}(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1+\theta)^{-(\alpha+\beta)}, \theta > 0$$

$$\frac{\alpha+x-1}{\beta+r+1} \quad (۴)$$

$$\frac{\alpha+x+1}{\beta+r+1} \quad (۳)$$

$$\frac{\alpha+x-1}{\beta+r-1} \quad (۲)$$

$$\frac{\alpha+x+1}{\beta+r-1} \quad (۱)$$

۲۳- در مسأله ۲۱ و ۲۲، برآورد می‌نیماکس θ کدام است؟

$$\frac{x+1}{r+1} \quad (۲)$$

$$\frac{x}{r+1} \quad (۱)$$

$$\frac{x+1}{r-1} \quad (۴)$$

$$\frac{x}{r-1} \quad (۳)$$

۲۴- فرض کنید X مقادیر $\theta+1$ ، $\theta-1$ را با احتمال $\frac{1}{4}$ اختیار می‌کند. تحت تابع زیان زیر، اگر $d_1(X) = X+1$ و $d_2(X) = X-1$ بهترین برآوردگر پایا (Best invariant Estimator) کدام است؟

$$L(\theta, a) = \begin{cases} |a-\theta|, & |a-\theta| \leq 1 \\ 1, & |a-\theta| > 1 \end{cases}$$

$$d_2(x) \quad (۲)$$

$$d_1(x) \quad (۱)$$

$$d_2(x) \text{ و } d_1(x) \quad (۴)$$

$$d_0(x) = \begin{cases} d_1(x), & x < 0 \\ d_2(x), & x \geq 0 \end{cases} \quad (۳)$$

۲۵- در مسأله ۲۴، تابع مخاطره (risk function) برآوردگر $d_0(X) = \begin{cases} d_1(X), & X < 0 \\ d_2(X), & X \geq 0 \end{cases}$ کدام است؟

$$R(\theta, d_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq \theta < 1 \\ 0, & \text{ow.} \end{cases} \quad (۲)$$

$$R(\theta, d_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq \theta < 1 \\ 0, & \text{ow} \end{cases} \quad (۱)$$

$$R(\theta, d_0) = \begin{cases} 1, & -1 \leq \theta < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{ow} \end{cases} \quad (۴)$$

$$R(\theta, d_0) = \begin{cases} 0, & -1 \leq \theta < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{ow} \end{cases} \quad (۳)$$

۲۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت در فاصله $(\theta, 2\theta)$ باشد. برآوردگر بیستمن پارامتر θ تحت

تابع زیان $L(\theta, \delta) = \left(\frac{\delta}{\theta} - 1\right)^2$ کدام است؟

$$\frac{(n+2) \left[\left(\frac{1}{2} X_{(n)}\right)^{-(n+2)} - X_{(n)}^{-(n+2)} \right]}{(n+1) \left[\left(\frac{1}{2} X_{(n)}\right)^{-(n+1)} - X_{(n)}^{-(n+1)} \right]} \quad (a) \qquad \frac{(n+2) \left[\left(\frac{1}{2} X_{(n)}\right)^{-(n+1)} - X_{(n)}^{-(n+1)} \right]}{(n+1) \left[\left(\frac{1}{2} X_{(n)}\right)^{-(n+2)} - X_{(n)}^{-(n+2)} \right]} \quad (b)$$

$$\frac{(n+1) \left[\left(\frac{1}{2} X_{(n)}\right)^{n+2} - X_{(n)}^{n+2} \right]}{(n+2) \left[\left(\frac{1}{2} X_{(n)}\right)^{n+1} - X_{(n)}^{n+1} \right]} \quad (c) \qquad \frac{(n+1) \left[\left(\frac{1}{2} X_{(n)}\right)^{n+1} - X_{(n)}^{n+1} \right]}{(n+2) \left[\left(\frac{1}{2} X_{(n)}\right)^{n+2} - X_{(n)}^{n+2} \right]} \quad (d)$$

۲۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت در فاصله $\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right)$ باشد. برآوردگر بیستمن θ تحت

تابع زیان قدر مطلق خطا $L(\theta, \delta) = |\delta - \theta|$ کدام است؟

$$\frac{1}{2}(X_{(n)} - X_{(1)}) \quad (a) \qquad X_{(n)} - X_{(1)} \quad (b)$$

$$\frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{X_{(n)} + X_{(1)}} \quad (c) \qquad \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)}) \quad (d)$$

۲۸- فرض کنید $X|\theta \sim N(\theta, 1)$ و $\theta \sim N(0, \tau^2)$ باشد. تحت تابع زیان قدر مطلق خطا، برآوردگر بیزی θ کدام است؟

$$\delta_B(X) = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} X \quad (a) \qquad \delta_B(X) = \frac{1 + \tau^2}{\tau^2} X \quad (b)$$

$$\delta_B(X) = X + \frac{1 + \tau^2}{\tau^2} \quad (c) \qquad \delta_B(X) = X + \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} \quad (d)$$

۲۹- فرض کنید $X_n \xrightarrow{D} X$ و برای یک M مثبت و هر n ، $|X_n| < M$. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $E(X)$ وجود دارد ولی $E(X_n) \not\rightarrow E(X)$ (۲) دلیلی ندارد $E(X)$ وجود داشته باشد.

(۳) $E(X)$ وجود دارد و $X_n \xrightarrow{P} X$ (۴) $E(X)$ وجود دارد و $E(X_n) \rightarrow E(X)$

۳۰- فرض کنید X_1, \dots, X_m و Y_1, \dots, Y_n دو نمونه تصادفی مستقلی از توزیع‌های به ترتیب $E(\mu, \sigma_1)$ ، $E(\mu, \sigma_2)$ باشند. اگر $W = \min(X_{(1)}, Y_{(1)})$ باشد، توزیع W کدام است؟ $f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)}$ ، $x > \mu$ $(X \sim E(\mu, \sigma) \rightarrow$

$$E(\mu, m\sigma_1 + n\sigma_2) \quad (a) \qquad E\left(\mu, \frac{m}{\sigma_1} + \frac{n}{\sigma_2}\right) \quad (b)$$

$$E(\mu, \sigma_1 + \sigma_2) \quad (c) \qquad E\left(\mu, \left(\frac{m}{\sigma_1} - \frac{n}{\sigma_2}\right)^{-1}\right) \quad (d)$$

۳۱- فرض کنید $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ انتگرال $\int_{-1}^1 x^2 d\alpha(x-5)$ کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۱۴
(۳) ۲۵
(۴) ۶۱

۳۲- فرض کنید $I(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ در مورد تابع $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} I(x-1+\frac{1}{n})$ ، $x \in [0, 1]$ کدام گزاره درست است؟

- (۱) α صعودی است.
(۲) α بر $[0, 1]$ پیوسته است.
(۳) α بر $[0, 1]$ مشتق پذیر است.
(۴) α بر $[0, 1]$ کراندار نیست.

۳۳- فرض کنید $\alpha(x) = e^x$ انتگرال $\int_0^2 [x^2] d\alpha(x)$ کدام است؟

- (۱) $4e$
(۲) $e+1$
(۳) $4(e-1)$
(۴) $4(e^2-1)$

۳۴- انتگرال $\int_0^2 x d[x^2]$ کدام است؟

- (۱) $2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$
(۲) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{4}$
(۳) $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$
(۴) $9 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{4}$

۳۵- حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\pi} \cos^{2n} x dx \right|^{\frac{1}{2n}}$ کدام است؟

- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۳۶- تغییر کل تابع $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ بر بازه $[1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) $4\sqrt{3} + \sqrt{2}$
(۳) $\frac{10 + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$
(۴) $\frac{10 - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$

۳۷- کدام تابع بر $[0, 1]$ با تغییر کراندار است؟

- (۱) $f(x) = e^{x^2}$ ، $x \in [0, 1]$
(۲) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1] \end{cases}$
(۳) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
(۴) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

۳۸- تابع $f(x) = x^2 + 4x - 7$ بر $[0, 7]$ به صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشته می‌شود. کدام مورد نادرست است؟

- (۱) $f(x) = (x+2)^2 - 21$
 (۲) $f(x) = (x^2 + 4x) - 17$
 (۳) $f(x) = x^2 + 2x - (-x + 17)$
 (۴) $f(x) = x^2 + 5x - (x + 17)$

۳۹- کدام گزاره در مورد تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ، $-\infty < a < b < \infty$ برقرار است؟

- (۱) اگر f نزولی باشد، با تغییر کراندار است.
 (۲) اگر f کراندار باشد، با تغییر کراندار است.
 (۳) اگر f مشتق‌پذیر باشد، با تغییر کراندار است.
 (۴) اگر f در بی‌نهایت نقطه مشتق کراندار داشته باشد، با تغییر کراندار است.

۴۰- کدام انتگرال وجود دارد؟

- (۱) $\int_0^4 (x^2 + [x])d[x]$
 (۲) $\int_0^4 (x^2 + 1)d[x]$
 (۳) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} ([x]d[x])$
 (۴) $\int_0^4 [x+1]d[x-1]$

۴۱- به ازای تابع $f(x) = \frac{x+1}{x+10}$ ، $x \in [0, \infty)$ ، انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{f(10x) - f(2x)}{x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\ln 2$
 (۲) $\ln 5$
 (۳) $\ln 8$
 (۴) $\frac{9}{10} \ln 5$

۴۲- تابع حدی دنباله توابع $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، کدام است؟

- (۱) $f(x) = 0$
 (۲) $f(x) = 1$
 (۳) $f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0, 1 \\ \frac{1}{2} & , x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$
 (۴) $f(x) = \begin{cases} x & , x \neq 0, 1 \\ 0 & , x = 0, 1 \end{cases}$

۴۳- برای دنباله توابع $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ ، $x \in [0, 1]$ ، حد $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ∞
 (۳) ۰
 (۴) e

- ۴۴- دنباله توابع $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. کدام گزاره نادرست است؟
- (۱) اگر f_n ها پیوسته و همگرایی $f_n \rightarrow f$ بر $[a, b]$ یکنواخت باشد، f نیز پیوسته است.
- (۲) اگر f_n ها مشتق پذیر و همگرایی $f_n \rightarrow f$ بر $[a, b]$ یکنواخت باشد، f مشتق پذیر است.
- (۳) اگر همگرایی $f_n \rightarrow f$ بر $[a, b]$ یکنواخت باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0$.
- (۴) اگر f_n ها بر $[a, b]$ انتگرال پذیر و همگرایی $f_n \rightarrow f$ بر $[a, b]$ یکنواخت باشد، آنگاه f نیز بر $[a, b]$ انتگرال پذیر است.

- ۴۵- کدام سری بر دامنه اش همگرایی یکنواخت است؟

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, x \in [-1, 1]$ (۲)	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx, x \in \mathbb{R}$ (۱)
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n, x \in (-1, 1]$ (۴)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}$ (۳)

- ۴۶- فرض کنید $0 < \epsilon < 1$ و $0 < |t| < 1 - \epsilon$. مجموع سری $1 + 2t + 3t^2 + \dots$ کدام است؟

$\frac{1}{1+t^2}$ (۲)	$\frac{1}{1-t^2}$ (۱)
$\frac{1}{(1-t)^2}$ (۴)	$\frac{t}{1-t} + 1$ (۳)

- ۴۷- کدام سری بر بازه $(0, \infty)$ همگرایی یکنواخت نیست؟

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ (۲)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ (۱)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{x+\frac{1}{2}}}$ (۴)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ (۳)

- ۴۸- تابع $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ که سه بار مشتق پذیر با مشتقات پیوسته است و

$f(0) = 1, f'(0) = 2, f''(0) = 2, f'''(0) = 4$ داده شده است.

بهترین تقریب f حول نقطه $x = 0$ کدام است؟

$1+x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3$ (۲)	$1+x+x^2+x^3$ (۱)
$1+\frac{2}{3}x + \frac{2}{4}x^2 + \frac{4}{5}x^3$ (۴)	$1+2x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3$ (۳)

- ۴۹- مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ کدام است؟

e^2 (۲)	e (۱)
1 (۴)	∞ (۳)

۵۰- شعاع همگرایی کدام سری $+\infty$ است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (۲) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (۱)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad (۴) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad (۳)$$

۵۱- حد دنباله $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{nx}}{x} dx$ کدام است؟

$$۱ \quad (۲) \qquad ۰ \quad (۱)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۴) \qquad \infty \quad (۳)$$

۵۲- اگر $I(x) = \begin{cases} ۰, & x \leq ۰ \\ ۱, & x > ۰ \end{cases}$ ، $\int_0^1 x^r d\alpha$ به ازای $x \in [0, 1]$ ، $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} I(x - 1 + \frac{1}{n})$ ، کدام است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \quad (۲) \qquad \infty \quad (۱)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} (1 - \frac{1}{n})^r \quad (۴) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^r \quad (۳)$$

۵۳- در مورد دنباله توابع $f_n(x) = x^n$ ، $x \in [0, 1]$ ، کدام رابطه برقرار است؟

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x), \quad x \in (0, 1) \quad (۲) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (۱)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (۴) \qquad \int_0^1 \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{f_n'(x)} dx \quad (۳)$$

۵۴- فرض کنید $I = \int_0^1 x^{\sqrt{x}} dx$ ، کدام رابطه درست است؟

$$I < \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (۲) \qquad \frac{1}{\sqrt{6}} < I < \frac{1}{\sqrt{7}} \quad (۱)$$

$$I = \frac{1}{5} \quad (۴) \qquad I = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad (۳)$$

۵۵- مجموع کدام سری $\ln 2$ است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad (۲) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \quad (۱)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad (۴) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (۳)$$

۵۶- در رابطه با توابع گاما و بتا کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) $\log \beta$ محدب است.
 (۲) $\log \Gamma$ محدب است.
 (۳) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ، $x > 0$.
 (۴) $\beta(m, n) = \beta(n, m)$ به ازای هر $m, n > 0$.

۵۷- حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^3}{2 \times 3 \times \dots \times (3+n)}$ کدام است؟

- (۱) ۰
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ∞

۵۸- فرض کنید C عدد اولی باشد. مقدار عبارت $\frac{e^{-C}}{C} \times \frac{e^C}{C} \times \frac{e^C}{C} \times \frac{e^{\frac{C}{2}}}{1 + \frac{C}{2}} \times \dots$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۴
 (۳) ۶
 (۴) ∞

۵۹- مقدار $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) π
 (۳) 2π
 (۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۰- حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$ کدام است؟

- (۱) ۰
 (۲) e
 (۳) ۱
 (۴) ∞