



773F

773

F

نام
نام خانوادگی
محل امضاء

عصر جمعه
۹۰/۱۰/۲۳



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

آزمون دانش‌پذیری دوره‌های فراگیر «کارشناسی ارشد» دانشگاه پیام نور

رشته‌ی ریاضی محض گرایش‌های
آنالیز (کد ۶۴)، جبر (کد ۶۵) و هندسه (کد ۶۶)

مدت پاسخگویی: ۱۸۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۹۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	آنالیز حقیقی (۱)	۳۰	۱	۳۰
۲	جبر پیشرفته	۳۰	۳۱	۶۰
۳	زبان تخصصی	۳۰	۶۱	۹۰

دی ماه سال ۱۳۹۰

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

- ۱- تابع $f: X \rightarrow Y$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $B \subseteq Y$ آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$ اگر و فقط اگر:
- (۱) f برو باشد. (۲) f معکوس‌پذیر باشد. (۳) f یک به یک باشد. (۴) f یکتا باشد.
- ۲- دنباله زیر را در نظر بگیرید:
- $$x_1 = 1$$
- $$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(x_n + \frac{6}{x_n} \right) ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
- (۱) دنباله واگراست. (۲) دنباله همگراست و حد آن برابر $\sqrt{2}$ است.
- (۳) دنباله همگراست و حد آن برابر $\sqrt{3}$ است. (۴) دنباله همگراست و حد آن برابر ۳ است.
- ۳- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟
- (۱) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (۲) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (۳) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ (۴) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$
- ۴- فرض کنید X یک فضای نرم‌داز بوده و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از X باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. هر گاه تعریف کنیم
- $$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$
- آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ کدام است؟
- (۱) x (۲) 0 (۳) \sqrt{x} (۴) ممکن است موجود نباشد.
- ۵- فرض کنید X یک فضای باناخ و $T: X \rightarrow X$ یک عملگر کراندار، و I عملگر همانی بر X باشد. هر گاه $\|T\| < 1$ آنگاه نسبت به عملگر $I - T$ چه می‌توان گفت؟
- (۱) معکوس‌پذیر است. (۲) اگر T معکوس‌پذیر باشد $I - T$ معکوس‌پذیر است. (۳) تنها در صورتی که $I + T$ معکوس‌پذیر باشد آنگاه $I - T$ معکوس‌پذیر است. (۴) حرفی نمی‌توان زد.
- ۶- هر گاه $1 \leq p < q < \infty$ ، آنگاه:
- (۱) همواره $I_p \subseteq I_q$ (۲) در حالت‌های خاصی $I_p = I_q$.
- (۳) همواره $I_p \subset I_q$ (۴) در حالت کلی نمی‌توان رابطه‌ای بین برقرار I_p و I_q کرد.
- ۷- $C[0, 1]$ را به ترتیب نقطه به نقطه در نظر گرفته و نرم را با $\|f\| = \int_0^1 f(x) dx$ تعریف می‌کنیم. در این صورت درباره $C[0, 1]$ چه می‌توان گفت؟
- (۱) شبکه تام است. (۲) $C[0, 1]$ نرم‌دار است اما شبکه نیست. (۳) هم شبکه نرم‌دار است و هم شبکه باناخ است. (۴) شبکه نرم‌دار است ولی شبکه باناخ نیست.
- ۸- فرض کنید $T: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ ، C^1 مشتق‌پذیر باشد. آنگاه درباره نگاشت $x \rightarrow T'(x)$ از V به توی $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ چه می‌توان گفت؟
- (۱) یک تابع پیوسته است. (۲) یک تابع مشتق‌پذیر است. (۳) تنها اگر T یک به یک باشد، پیوسته است. (۴) حرفی نمی‌توان زد.

-۹

بازه $[0, 1]$ را همراه با اندازه لبگ λ در نظر می‌گیریم. به ازاء هر n ، $[0, 1]$ را به n زیر بازه

تقسیم می‌کنیم. این بازه‌ها را به صورت زیر شمارش می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ & \left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ & \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right], \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right] \\ & \left[0, \frac{1}{5}\right], \dots \end{aligned}$$

فرض کنید f_n تابع مشخصه بازه n ام دنباله فوق باشد. در مورد دنباله توابع $\{f_n\}$ چه می‌توان گفت؟

(۱) همگرا در اندازه است و در برخی نقاط همگرا است. (۲) نه همگرا در اندازه است و نه در نقطه‌ای همگرا است.

(۳) همگرا در اندازه نیست اما در برخی نقاط همگرا است. (۴) همگرا در اندازه است ولی در هیچ نقطه همگرا نیست.

-۱۰ فرض کنید $\Omega = \{0, 1\}$ و حلقه $\mathfrak{R} = \{\emptyset, \Omega\}$ روی آن تعریف شده است. با تعریف اندازه μ روی \mathfrak{R} به صورت

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega) = 1 \quad \mu^*(\emptyset) = 0, \mu^*(\Omega) = 1$$

$$\mu^*(\{0\}) = 1, \mu^*(\{1\}) = 0 \quad \mu^*(\{0\}) = 1, \mu^*(\{1\}) = 0 \quad (۱)$$

$$\mu^*(\Omega) = 2, \mu^*(\{0\}) = 1, \mu^*(\{1\}) = 1 \quad \mu^*(\Omega) = 2, \mu^*(\{0\}) = 1, \mu^*(\{1\}) = 1 \quad (۳)$$

-۱۱ اگر μ اندازه تعریف شده در سؤال ۱۰ باشد آنگاه نسبت به پیوستگی μ روی $E = \{0\}$ چه می‌توان گفت؟

(۱) μ روی E پیوسته است. (۲) μ تنها از پائین روی E پیوسته است.

(۳) μ تنها از بالا روی E پیوسته است. (۴) μ نه از بالا و نه از پائین روی E پیوسته است.

-۱۲ فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیر (لبگ) ناتهی از $[0, 1]$ باشد که $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_k) = 1$ آنگاه

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \text{ برابر است با:}$$

$$\{0\} \quad (۱) \quad [0, 1] \quad (۳) \quad \emptyset \quad (۴)$$

-۱۳ اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دارای خاصیت زیر باشد:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: |f(x) - f(y)| < \sqrt{2} |x - y|$$

و A مجموعه پوچ لبگ باشد، آنگاه $f(A)$:

(۱) پوچ است. (۲) تنها وقتی f مشتق‌پذیر باشد، پوچ است.

(۳) تنها وقتی f یک به یک باشد، پوچ است. (۴) لزوماً پوچ نیست.

-۱۴ اگر گزاره‌های A و B به صورت زیر باشند:

X یک فضای نرم‌دار موضعاً فشرده باشد: A

X با بعد متناهی باشد: B

آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$$A \Leftrightarrow B \quad (۱) \quad B \Rightarrow A \text{ تنها} \quad (۲)$$

$$A \Rightarrow B \text{ تنها} \quad (۳) \quad (۴) \text{ شرایط دیگری برای نتیجه‌گیری لازم است.}$$

۱۵- فرض کنید X یک شبکه باناخ باشد و $x \geq 0, x \in X$ آنگاه

$$\sup\{f(x) : \|f\| = 1, 0 \leq f \in X^*\}$$

برابر کدام است؟

(۱) $\|x\|$ (۲) $\|x-1\|$ (۳) $1 + \|x\|$ (۴)

۱۶- اگر λ و μ دو اندازه علامتدار باشند آنگاه:

(۱) $\lambda^+ \ll \mu \Rightarrow \lambda \ll \mu$ (۲) $\lambda^+ \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \leq |\mu|$

(۳) $\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \leq |\mu|$ (۴) $\lambda^- \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \leq |\mu|$

۱۷- اگر λ و μ دو اندازه علامتدار باشند و اگر $\lambda \perp \mu, \lambda \ll \mu$ آنگاه:

(۱) $\lambda = 0$ (۲) برای هر $A, \mu(A) = 0$

(۳) برای هر مجموعه $A, \lambda(A) > 0$ (۴) اگر $\lambda(A) = 0$ آنگاه $\mu(A) = 0$

۱۸- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و A را مجموعه نقاط ناپیوستگی f تعریف کنید، آنگاه:

(۱) A نمی تواند مجموعه اعداد گویا باشد. (۲) A می تواند زیرمجموعه ای از اعداد گنگ باشد.

(۳) A نمی تواند مجموعه اعداد گنگ باشد. (۴) A می تواند اجتماعی از اعداد گویا و گنگ باشد.

۱۹- تابع f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \text{ گنگ باشد} \\ \frac{1}{n} & ; \quad x = \frac{m}{n} \text{ گویا (m و n نسبت به هم اول باشند).} \end{cases}$$

آنگاه:

(۱) f ، ناپیوسته است.

(۲) f روی اعداد گنگ و اعداد گویای صحیح پیوسته است.

(۳) f روی اعداد گنگ پیوسته و روی اعداد گویا ناپیوسته است.

(۴) f تنها روی اعداد اصمی که توان دوم آنها عدد صحیح است پیوسته است.

۲۰- فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه متناهی بوده آنگاه می توان گفت:

(۱) $L_{\frac{1}{2}}(\mu) \subseteq L_{\frac{1}{4}}(\mu)$ (۲) $L_{\frac{1}{4}}(\mu) \subseteq L_{\frac{1}{2}}(\mu)$

(۳) $L_{\frac{1}{2}}(\mu) \cup L_{\frac{1}{4}}(\mu) = L_{\frac{1}{4}}(\mu)$ (۴) نمی توان در حالت کلی رابطه ای تعریف کرد.

۲۱- اگر μ یک اندازه علامتدار باشد آنگاه:

(۱) $\mu^+ \wedge \mu^-$ همواره صفر است. (۲) $\mu^+ \wedge \mu^-$ همواره مثبت است.

(۳) اگر $\mu^+ \wedge \mu^-$ صفر نباشد، ∞ است. (۴) $\mu^+ \wedge \mu^-$ همواره مخالف صفر و متناهی است.

۲۲- فرض کنید \mathfrak{R} گرادیه ای از زیر مجموعه های اندازه پذیر دوهده و جدا از هم از \mathbb{R} است که هر یک اندازه مثبت دارد. آنگاه:

(۱) \mathfrak{R} متناهی است. (۲) حداکثر شمارش پذیر است.

(۳) نامتناهی است. (۴) شمارش پذیر است.

۲۳- فرض کنید f و g دو تابع پیوسته از (X, τ) به توی فضای هاسدورف (Y, τ_1) باشند، هم چنین فرض کنید $A \subset X$ و A

چگال باشد به طوری که $\forall x \in A: f(x) = g(x)$ اگر $f(x) = x$ باشد، g کدام است؟

(۱) $g(x) = f(x) + x$ (۲) $g(x) = x + x$

(۳) $g(x) = f(x) - x$ (۴) $\forall x \in X$ به ازاء $g(x) = x$

- ۲۴- \mathbb{N} را مجموعه اعداد طبیعی در نظر بگیرید. آنگاه اندازه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
 (۱) صفر است. (۲) بی‌نهایت است. (۳) از اندازه \mathbb{N} بیشتر است. (۴) اندازه پذیر نیست.
 ۲۵- فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر تعریف شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & , x \in (0, 1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

فرض کنید f انتگرال پذیر لبگ است. آنگاه $\int f d\lambda$ چه مقدار می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

۲۶- اگر $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ روی بازه $[1, \infty)$ تعریف شود، آنگاه انتگرال لبگ $\int f d\lambda$:

- (۱) موجود و برابر e . (۲) موجود و برابر ۱. (۳) موجود و برابر $\ln 2$. (۴) موجود نیست.
 ۲۷- دو انتگرال لبگ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx, f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2$$

آنگاه $f(t) + g(t)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) π

۲۸- تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2-1}} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$

آنگاه $\text{supp} f$ برابر است با:

- (۱) $(0, 1]$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $[-1, 1] - \{0\}$

۲۹- هر گاه $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه f را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع نوشت و f مشتق پذیر است.

- (۱) نزولی - همه جا (۲) صعودی - تقریباً همه جا (۳) صعودی - همه جا (۴) نزولی - تقریباً همه جا

۳۰- فرض کنید μ یک اندازه بورل بر \mathbb{R}^k و عدد ثابت $C > 0$ چنان موجود است که هر گاه برای E در رابطه $\lambda(E) = C$ صدق کند آنگاه $\mu(E) = C$. چه رابطه‌ای بین μ و λ برقرار است؟

- (۱) $\mu = \lambda$ تنها روی مجموعه‌های متناهی (۲) $\mu = \lambda$ تنها روی مجموعه‌های فشرده
 (۳) $\mu = \lambda$ (۴) $\mu = \lambda$ تنها روی مجموعه‌هایی با اندازه متناهی

- ۳۱ فرض کنید K یک هیأت و R حلقه $K[x,y,z]$ باشد و همچنین $M = R(x-1) + R(y-2) + R(z+1)$ و $N = \langle x, y^2, z^3 \rangle$. در این صورت کدام گزینه برقرار نیست؟
 (۱) N یک ایدال M -ابتدایی R است.
 (۲) N یک ایدال اول R است.
 (۳) M ایدال ماکسیمال R است.
 (۴) M ایدال ابتدایی R است.
- ۳۲ فرض کنید I ایدال سرهای از حلقه تعویض پذیر و نوتری R باشد. در این صورت کدام مورد نادرست است؟
 (۱) I تجزیه ابتدایی دارد.
 (۲) I تجزیه ابتدایی مینیمال دارد.
 (۳) I تحویل ناپذیر است.
 (۴) اگر I تحویل ناپذیر باشد ابتدایی است.
- ۳۳ فرض کنید $R = \mathbb{Z}[t]$ و برای $t \in R$ تعریف می کنیم $S := \{t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. به ازای کدام مقدار t ، حلقه کسرهای $S^{-1}R$ حلقه صفر می شود؟
 (۱) ۳
 (۲) ۶
 (۳) ۸
 (۴) ۱۰
- ۳۴ فرض کنید $R = \mathbb{Z}$ و S را مجموعه اعداد فرد در نظر بگیرید. در این صورت کدام گزینه یک عنصر وارون پذیر $S^{-1}R$ است؟
 (۱) $\frac{2}{7}$
 (۲) $\frac{8}{7}$
 (۳) $\frac{14}{7}$
 (۴) $\frac{15}{7}$
- ۳۵ فرض کنید F یک هیأت باشد. در این صورت کدام گزینه در مورد $F[[x]]$ نادرست است؟
 (۱) یک حلقه موضعی است.
 (۲) هر عنصر ناصفر آن وارون پذیر است.
 (۳) یک دامنه تجزیه یکتا است.
 (۴) رادیکال جیکبسن این حلقه (x) است.
- ۳۶ فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر و S زیر مجموعه ای ضربی بسته از حلقه باشد و همچنین $f: R \rightarrow S^{-1}R$ نشان دهنده همریختی حلقه ای طبیعی باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) اگر $P \in \text{Spec}(R)$ و $P \cap S \neq \emptyset$ آنگاه $P^e = S^{-1}R$
 (۲) اگر Q ایدال ابتدایی R باشد و $Q \cap S = \emptyset$ آنگاه $Q^e = S^{-1}R$
 (۳) اگر $P \in \text{Spec}(R)$ و $P \cap S = \emptyset$ آنگاه $P^e \in \text{Spec}(S^{-1}R)$
 (۴) ایدال های ابتدایی $S^{-1}R$ دقیقاً ایده آل های به صورت Q^e هستند که Q ایدال ابتدایی R و مجزا از S است.
- ۳۷ فرض کنید R حلقه ای یکدار و تعویض پذیر است و M یک R -مدول ساده می باشد. در این صورت اگر $a \in M$ عنصر ناصفری باشد کدام گزینه صحیح است؟
 (۱) R یک حلقه موضعی است.
 (۲) $\text{Jac}(R)M = M$
 (۳) $\forall r \in \text{Jac}(R); ra = 0$
 (۴) $\forall r \in \text{Jac}(R); ra = a$
- ۳۸ فرض کنید حلقه تعویض پذیر R حلقه ای نوتری باشد. در این صورت کدام گزینه یک R -مدول نوتری است؟
 (۱) $R[x]$
 (۲) $\prod_{i \in I} R_i$ ، که در آن به ازای هر $i \in I$ ، $R_i \cong R$
 (۳) $\bigoplus_{i \in I} R_i$ ، که در آن به ازای هر $i \in I$ ، $R_i \cong R$
 (۴) $M_n(R)$ ، مجموعه ماتریس های $n \times n$ که درایه های آنها متعلق به R است.
- ۳۹ کدام گزینه در مورد عنصر γ در حلقه \mathbb{Z}_{10} صحیح است؟
 (۱) عنصری اول است ولی تحویل ناپذیر نیست.
 (۲) عنصری اول نیست ولی تحویل ناپذیر است.
 (۳) عنصری اول و تحویل ناپذیر است.
 (۴) عنصری اول و تحویل ناپذیر نیست.
- ۴۰ حلقه \mathbb{Z}_{18} به ترتیب دارای چند عنصر پوچتوان و چند عنصر وارون پذیر است؟
 (۱) ۳-۴
 (۲) ۶-۴
 (۳) ۳-۶
 (۴) ۶-۶

۴۱- فرض کنید R یک دامنه صحیح است. کدام یک از حلقه‌های زیر یک دامنه صحیح نیست؟

$$(۱) \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \circ \\ \circ & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in R \right\} \quad (۲) \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \mid \alpha \in R \right\}$$

$$(۳) \left\{ \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \beta \end{bmatrix} \mid \beta \in R \right\} \quad (۴) \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \circ \\ \circ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in R \right\}$$

۴۲- فرض کنید $M_5 \xrightarrow{f_4} M_4 \xrightarrow{f_3} M_3 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_1} M_1$ دنباله کاملی از R -مدولها و R -همریختی‌ها باشد به طوری که f_1 پوشاست و f_4 یک به یک. در این صورت:

$$(۱) M_1 = \circ \quad (۲) M_2 = \circ$$

$$(۳) M_3 = \circ \quad (۴) M_4 = \circ$$

۴۳- فرض کنید $M_3 \xrightarrow{\psi} M_2 \xrightarrow{\phi} M_1$ دنباله کاملی از R -مدولها و R -همریختی‌ها باشد. از فرضیات در کدام گزینه می‌توان نتیجه گرفت که $M_3 = \circ$ ؟

$$(۱) \phi \text{ پوشا و } \psi \text{ پوشا} \quad (۲) \phi \text{ یک به یک و } \psi \text{ پوشا}$$

$$(۳) \phi \text{ یک به یک و } \psi \text{ یک به یک} \quad (۴) \phi \text{ پوشا و } \psi \text{ یک به یک}$$

۴۴- فرض کنید \mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی باشد و $M_2(\mathbb{R})$ مجموعه تمام ماتریسهای 2×2 که درایه‌های آنها اعدادی حقیقی‌اند. در این صورت رتبه $M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$ کدام است؟

$$(۱) ۸ \quad (۲) ۴$$

$$(۳) ۲ \quad (۴) ۱$$

۴۵- کدام مورد یک \mathbb{Z} -مدول آزاد است؟

$$(۱) \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}} \oplus 6\mathbb{Z} \text{ به عنوان } \mathbb{Z}\text{-مدول} \quad (۲) 6\mathbb{Z} \oplus 7\mathbb{Z} \text{ به عنوان } \mathbb{Z}\text{-مدول}$$

$$(۳) \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}} \text{ به عنوان } \mathbb{Z}\text{-مدول} \quad (۴) \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \oplus 7\mathbb{Z} \text{ به عنوان } \mathbb{Z}\text{-مدول}$$

۴۶- در $\mathbb{R}[x]$ حلقه چند جمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی، فرض کنید B_m مجموعه تمام چند جمله‌ای‌هایی از $\mathbb{R}[x]$ باشد که ضریب x^m در آنها صفر است. در این صورت برای چند عدد صحیح $m \geq 0$ به ترتیب مجموعه B_m یک ایدئال - یک زیر حلقه $\mathbb{R}[x]$ می‌شود؟

$$(۱) ۱-۰ \quad (۲) ۱-۱$$

$$(۳) ۲-۱ \quad (۴) ۲-۲$$

۴۷- فرض کنید R حلقه تعویض پذیر و یکدار باشد و I یک ایدئال اصلی R است و نیز $J = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I^n$. اگر Q یک ایدئال اول R باشد که $I \subsetneq Q$ آنگاه:

$$(۱) Q \subseteq J$$

(۲) J یک ایدئال سره Q است.

(۳) $J \cap Q$ لزوماً ایدئال اولی از R نیست.

(۴) عدد طبیعی $m > 1$ موجود است که $Q \subseteq I^m$ ولی $Q \not\subseteq I^{m+1}$

۴۸- فرض کنید R حلقه‌ای نوتری است. در این صورت کدام R -مدول لزوماً نوتری نیست؟

$$(۱) \frac{R}{I} \text{ که } I \text{ ایدئالی اول از } R \text{ است.} \quad (۲) \text{ ایدئال } I \text{ از } R \text{ که یک ایدئال اصلی است.}$$

$$(۳) M_n(R), \text{ مجموعه تمام ماتریس‌های } n \times n \text{ بر حلقه } R \quad (۴) \bigoplus_{i \in I} R_i \text{ که در آن } R_i \cong R, \forall_i$$

۴۹- فرض کنید $\left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ و } n \in \mathbb{N} \text{ و } 5 \nmid m \text{ و } 3 \nmid n \right\}$ بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر نیست و $A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ و } n \in \mathbb{N} \text{ و } 5 \nmid m \text{ و } 3 \nmid n \right\}$ که با جمع و ضرب معمولی اعداد یک حلقه است. در این صورت تعداد ایدآل‌های ماکسیمال A برابر است با:

- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۵۰- فرض کنید $\left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ و } n \in \mathbb{N} \text{ و } 5 \nmid m \text{ و } 3 \nmid n \right\}$ که با جمع و ضرب معمولی اعداد یک حلقه است. در این صورت $Jac(A)$ (۱) صفر است.

(۲) مجموعه تمام اعضای A است که صورت کسر آنها بر ۱۵ بخش پذیر است.

(۳) مجموعه تمام اعضای A است که صورت کسر بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر است.

(۴) مجموعه تمام اعضای A است که صورت کسر فقط بر ۳ یا فقط بر ۵ بخش پذیر است.

۵۱- اگر I و J دو ایدآل حلقه تعویض پذیر R باشند، آنگاه کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

- (۱) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$
(۲) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I}} + \sqrt{\sqrt{J}}$
(۳) $\sqrt{I+J} = \sqrt{I} + \sqrt{J}$
(۴) $\sqrt{I+J} = \sqrt{I} \sqrt{J}$

۵۲- فرض کنید $\{I_i\}_{i=1}^p$ خانواده‌ای از ایدآل‌های دوبه‌دو متباین حلقه تعویض پذیر R باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $I_1 + I_2 + I_3 = R$
(۲) $I_1 I_2 I_3 = R$
(۳) $I_1 \cap I_2 + I_3 \cap I_4 = R$
(۴) $I_1 + I_2 \cap I_3 \cap I_4 = R$

۵۳- فرض کنید R حلقه‌ای تعویض پذیر و یکدار است و همچنین M یک R -مدول با طول متناهی باشد و $f: M \rightarrow M$ یک همریختی مدولها است. در این صورت:

- (۱) یک به یک بودن f معادل با پوشا بودن آن است.
(۲) یک به یک بودن f مستقل از پوشا بودن آن است.
(۳) از یک به یک بودن f می‌توان پوشا بودن آن را نتیجه گرفت ولی عکس آن لزوماً صحیح نیست.
(۴) از پوشا بودن f می‌توان یک به یک بودن آن را نتیجه گرفت ولی عکس آن لزوماً صحیح نیست.

۵۴- کدام یک از مدول‌های زیر ساده است؟

- (۱) \mathbb{R} به عنوان \mathbb{Q} -مدول
(۲) \mathbb{Z} به عنوان \mathbb{Z} -مدول
(۳) \mathbb{Q} به عنوان \mathbb{Q} -مدول
(۴) $p\mathbb{Z}$ به عنوان \mathbb{Z} -مدول که در آن p عدد اول فرد است.

۵۵- ایدآل (x) در حلقه $\mathbb{Z}[x]$ ایدآلی، است.

- (۱) اول و ماکسیمال است.
(۲) اول و ماکسیمال نیست.
(۳) اول نیست ولی ماکسیمال است.
(۴) اول است ولی ماکسیمال نیست.

۵۶- فرض کنید p یک عدد اول فرد است و $A = \left\{ \frac{a}{p^n} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ و } n \in \mathbb{N} \right\}$. در این صورت A به عنوان \mathbb{Z} -مدول:

- (۱) هم نوتری و هم آرئینی است.
(۲) نوتری است ولی آرئینی نیست.
(۳) نوتری و آرئینی نیست.
(۴) نوتری نیست ولی آرئینی است.

۵۷- فرض کنید R_1 و R_2 دو حلقه تعویض پذیر باشند و $\phi: R_1 \rightarrow R_2$ یک همریختی حلقه‌ای است. در این صورت اگر N ایدآلی از R_2 باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر N ایدآل اول R_2 باشد $\phi^{-1}(N)$ ایدآل اول R_1 است.

(۲) اگر N ایدآل ماکسیمال R_2 باشد $\phi^{-1}(N)$ ایدآل اول R_1 است.

(۳) اگر $\frac{R_2}{N}$ یک دامنه صحیح باشد آنگاه $\frac{R_1}{\phi^{-1}(N)}$ یک دامنه صحیح است.

(۴) اگر N ایدآل ماکسیمال R_2 باشد $\phi^{-1}(N)$ ایدآل ماکسیمال R_1 است.

۵۸- فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یک‌دار است. اگر $E(R)$ مجموعه عناصر خود توان R باشد تعداد اعضای $Jac(R) \cap E(R)$ کدام است؟

- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۵۹- مجموعه اعداد گویا، \mathbb{Q} را به عنوان \mathbb{Z} -مدول در نظر بگیرید. در این صورت اگر M و N به ترتیب زیر مدول‌های \mathbb{Q} تولید شده توسط ۲ و ۳ باشند آنگاه:

- (۱) $M = N$
(۲) $M + N = \mathbb{Q}$
(۳) $M + N = \mathbb{Z}$
(۴) $M \cap N = (0)$

۶۰- فرض کنید R و S دو حلقه تعویض‌پذیر و یک‌دار باشند و $\phi: R \rightarrow S$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای پوشا باشد. در این صورت $\phi(Jac(R))$ است.

- (۱) صفر
(۲) یک ایدال ماکسیمال S
(۳) یک ایدال با تولید منتهای از S
(۴) زیر مجموعه هر ایدال ماکسیمال S

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 61- An American Algebraist believes that the branch of mathematics known as 'Algebra' has been by Al-Khawrizmi.
1) functioned 2) founded 3) contributed 4) occurred
- 62- The Fibonacci number sequence appears in such unrelated as the family tree of a male bee and the keyboard of piano.
1) topics 2) properties 3) roots 4) curves
- 63- We treat polynomials in their own right and the ring structure of the set of all polynomials.
1) fascinate 2) obtain 3) acquaint 4) exploit
- 64- Although interesting, the detailed study of polynomials is beyond the of this book.
1) scope 2) effort 3) epoch 4) ratio
- 65- The Babylonians developed a considerable skill at algebraic and were using special cases of the quadratic formula.
1) satisfaction 2) reminiscence 3) manipulation 4) institution
- 66- The first studies may go back to the earliest times when numbers first curiosity.
1) rolled 2) verified 3) aroused 4) commuted
- 67- Make a drawing of the figure, cut out six pieces and the two shaded rectangular pieces away.
1) denote 2) throw 3) enclose 4) specify
- 68- A partition of set X is a decomposition of the set into non-empty subsets, no two of which and whose union is all of X.
1) overlap 2) partition 3) represent 4) decompose
- 69- The most spectacular spirals in nature can be seen only through a telescope-these are the galaxies and of the universe.
1) trunks 2) receptors 3) chambers 4) nebulae
- 70- The method of Gaussian elimination involves an echelon form of the matrix of the system of equations.
1) substituted 2) enabled 3) augmented 4) corresponded

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Early in the seventeenth century, the German mathematician Johannes Kepler analyzed a vast number of astronomical observations (71) by Danish astronomer Tycho Brahe and concluded that the planets must (72) around the sun elliptical orbits. He didn't know (73) Fifty years later the English mathematician and physicist Isaac Newton answered that question. Why do (74) spiral counterclockwise in the northern hemisphere? When will radioactive material (75) sufficiently decayed to enable safe (76)? How long will the concentration of a drug in the (77) remain

at effective levels? How do radio waves propagate (78) space? Why does an epidemic spread faster and faster and then (79) down? How can I be (80) the bridge I designed won't be destroyed in a windstorm?

- | | | | | |
|-----|--------------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| 71- | 1) made | 2) that made | 3) to make | 4) making |
| 72- | 1) move | 2) moving | 3) movement | 4) moved |
| 73- | 1) why | 2) why that | 3) why it | 4) it why |
| 74- | 1) wind hurricanes | 2) hurricane winds | 3) wind of hurricane | 4) winds hurricane |
| 75- | 1) is | 2) be | 3) being | 4) is being |
| 76- | 1) handles | 2) handled | 3) handle | 4) handling |
| 77- | 1) stream blood | 2) stream's blood | 3) bloodstream | 4) blood's stream |
| 78- | 1) on | 2) above | 3) within | 4) through |
| 79- | 1) slows | 2) slow | 3) slowed | 4) slowing |
| 80- | 1) sure | 2) sure that | 3) sure of | 4) sure for |

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following passage and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

Passage 1:

Most people are familiar with the term statistics as it is used to denote and record numerical facts and figures: for example; the daily prices of selected materials sold in the stores, the number of elementary schools in the country, or even the number of meters gained by winning team in a game. However, this usage of the term is not the central focus of the subject. Statistics primarily deals with situations in which the occurrence of some event cannot be predicted with certainty. Our conclusions are often uncertain because we base them on incomplete data. Statistics is a science of concepts and method chiefly used to collect and interpret complete data concerning a particular area of investigation and to draw conclusions where uncertainty and variation are present. The development of the theory of probability has increased the scope of statistical applications. Much data can be estimated accurately by certain probability distributions, and the results by certain statistical data. In collection and analyzing statistical data, adequate precautions must be taken to secure complete and accurate information.

- 81- **The passage points to the fact that**
- 1) teams win better if they know a little statistics
 - 2) numerical facts and figures are usually denoted
 - 3) selected store materials can form part of statistics
 - 4) the science of statistics is not quite usage-based
- 82- **The passage suggests that**
- 1) it is not possible to predict events with certainty
 - 2) occurrence of events depends on why they happen
 - 3) statistics deals with situations of uncertainty
 - 4) uncertain conclusions may result in statistical analysis
- 83- **It is stated in the passage that statistical applications** **before the development of the theory of probability.**
- 1) had little relevance
 - 2) had a more limited scope
 - 3) were mainly used in predictions
 - 4) were used for complex calculations

84- We may understand from the passage that the theory of probability is of special importance to the analysis of statistical data when dealing with data.

- 1) a lot of 2) unpredictable 3) accurate 4) distributed

85- The word 'secure' in the passage (underlined) is closest to

- 1) 'approach' 2) 'originate' 3) 'interpret' 4) 'guarantee'

Passage 2:

Linear algebra is a central subject in undergraduate mathematics. Many important topics must be included in this course. For example, linear dependence, basis, inner product, and linear transformation must be covered thoroughly and carefully. Not only are such topics important in linear algebra, they are usually a per-requisite for other courses such as differential equations. A great deal of attention has been given in this book to presenting the "standard" linear algebra topics.

This course is often the first course in abstract mathematics for students. The reader should not be overwhelmed with proofs, but should nevertheless be taught how to prove theorems. The proofs of some theorems are given, when those proofs are instructive. Some proofs are given in outline from whereas other proofs have been omitted. Students should be introduced slowly and carefully to the art of developing and writhing proofs. This skill is at the heart of mathematics. The student should be trained to think mathematically.

86- The passage suggests that

- 1) undergraduate courses deal mainly with linear algebra
2) linear algebra is part of linear transformation courses
3) basis and inner product are taught in graduate courses
4) differential equations depends partly on inner product

87- The passage seems to say that

- 1) it is rather simple to teach how to prove theorems
2) abstract physics and mathematics are related
3) not all proofs for theorems are instructive to teach
4) standard linear algebra topics are not very complex

88- The passage is mainly about

- 1) how to teach mathematics 2) undergraduate studies
3) proving theorems 4) a course in mathematics

89- We may understand from the passage that thinking mathematically

- 1) is a skill which has to be learned even if it is not taught
2) is taught by giving proofs for theorems in outline form
3) starts at the early stages of becoming interested in mathematics
4) depends very much on the art of developing and writing proofs

90- The word 'overwhelm' in the passage (underline) can best be replaced by

- 1) dealt in 2) flooded by 3) provided with 4) pushed into